6. Дәрежелік қатарлар.

Анықтама 5. $(x-a)$ –ға қатысты дәрежелік қатар деп:

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k, \qquad (6)$$

түрінде берілген қатарды айтамыз, мұндағы $a_0, a_1, a_2, \ldots$ коэффиценттері – тұрақты сандар.

Егер $a=0$ болса, онда: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

(6.1)

Абель теоремасы.

1) Егер (6.1) қатары $x_0 \neq 0$ нүктесінің небір мәндерінде жинақты болса, онда ол $|x| < |x_0|$ болғанда абсолютті жинақты;

2) ал $x_0' \neq 0$ нүктесінің небір мәндерінде (6.1) қатары жинақсыз болса, онда $|x| > |x_0|$ тесіздігін қанағаттандыратын x – тің әрбір мәнінде (6.1) қатары жинақсызқатар болады.

Абель теоремасынан $|x| < R$ болғанда (6.1) қатары жинақты, ал $|x| > R$ үшін жинақсыз болатындай R санының бар екенін көреміз.

Дәрежелік қатардың жинақтылық облысы деп, центрі координаталар басында болатын интервал болады.

Анықтама. Дәрежелік қатардың жинақтылық интервалы деп $(-R;R)$ интервалы аталады, және интервалдың ішінде орналасқан әрбір x – тің нүктелерінде қатар жинақты, және абсолютті жинақты қатар болады, ал интервалдан тысқары орналасқан x – тің нүктелерінде қатар жинақсыз болады.

R саны дәрежелік қатардың жинақтылық радиусы деп аталады.

Интервалдың шеткі нүктелерінде қатардың жинақты, жинақсыз болуы әрбір қатарға жекеше зерттелінеді.

Егер $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ ақырлы шегі табылса, онда $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$ қатарына Даламбер белгісін қолдансақ, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\cdot L < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{L} = R$, яғни,

$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

Дәл осылай, Коши белгісін қолдансақ: $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Мысал 6.1. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$ қатарының жинақтылық облысын табайық.

$a_n = \frac{1}{n}$ болғандықтан, $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n=1}{n} = 1$ - жинақтылық радиусы. $x = \pm 1$ нүктелерінде жинақтылыққа зерттейміз.

$x = 1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$ - гармониялық қатар, жинақсыз болады.

$x = -1 \Rightarrow -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ...$-таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар, бұл жинақты қатар. Сонымен, берілген дәрежелік қатардың жинақтылық облысы: $[-1;1)$.

(6) қатарының жинақтылық интервалы $(a-R;\ a+R)$, мұндағы R - (6.1) қатарының жинақтылық радиусы.

D -кез келген бүтіндей (6) қатарының жинақтылық интервалының ішінде жататын кесінді болсын. Онда:

1. (6) қатары мажорланған (бірқалыпты жинақты) D кесіндісінде.
2. (6) қатарының қосындысы жинақтылық интервалында үзіліссіз.
3. (6) қатарын D кесіндісінде мүшелеп интегралдауға және қанша болса сонша рет мүшелеп дифференциалдауға болады, сонымен қатар, алынған дәрежелік қатардың жинақтылық интервалы (6) қатарының жинақтылық интервалымен бірдей..

Мысал 6.2. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(n-2)}$.

Шешуі. $c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)}$, $c_n \neq 0$ егер $n = 3,4,...$ болса.

Онда $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n-1)}{n(n-2)} = 1$.

Сонымен, $R = 1$- жинақтылық радиусы; $(-1,1)-$жинақтылық интервалы.

Интервалдың шеткі нүктелерінде берілген қатарды жинақтылыққа зерттейік.

$\mathrm{x} = -1$ болса:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n(n-2)} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n(n-2)} =- \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)}$$

Бұл қатарды $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{n}^2}$ жинақты қатарымен салыстырамыз:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n(n-2)} : \frac{1}{n^2} \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n(n-2)} = 1 \neq 0 .$$

Сонымен, салыстырудың екінші белгісі бойынша $\mathrm{x} = -1$ болғанда қатар абсолютті жинақты.

Егер $\mathrm{x} = 1$ болса, онда берілген қатар мына түрде болады: $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)}$.

Бұл қатардың мүшелерінің абсолют шамасынан құрылған қатар: $\sum_{n\to 0}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)}$ жинақты қатар, ендеше жоғарыдағы таңбасы ауыспалы қатар абсолютті жинақты.

Сонымен, берілген қатар $\mathrm{x} \in [-1,1]$ болғанда абсолютті жинақты.

7. Тейлор қатары

$y = f(x)$ функциясының қандай да бір a нүктесінің аймағында $(n+1)$ - ші ретті туындысы бар болсын. Онда Тейлор формуласы әділ болады:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \mathrm{R_n}(x) \; (7)$$

Қатардың қалдық мүшесі:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi = a + \Theta(x-a), \quad 0 < \Theta < 1.$$

Егер $f(x)$ функциясының x=a нүктесінде жоғарғы ретті түгел туындылары болса, онда n санын шексіз үлкен алуымызға болады, онда $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Ендеше (7.1) формуласында $\mathrm{n} \to \infty$ шегіне көшіп, шектелмеген Тейлор қатарын аламыз:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + ... (7.1)$$

Бұл теңдік $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ ғана орындалады, әрі қатардың $f(x)$ функциясына D-да жинақталуы бірқалыпты.

Теорема 6. Егер $f(x)$ функциясы $D = (a-r; a+r)$ интервалында шектеусіз рет дифференциалданатын болса және $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} R_n(x) = 0, \quad \forall x \in D$, онда D-да:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + ..., \qquad (7.1)$$

Әрі, қатардың $f(x)$ функциясына D-да жинақталуы бірқалыпты.

Тейлор қатарында a=0 болса, онда қатардың дербес түрі Маклорен қатарын аламыз:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + ... (7.2)$$

Мысал 7. $y = e^x$ функциясын Маклорен формуласы бойынша жікте және e санын $\varepsilon = 10^{-5}$ дәлдікке дейін есепте.

$$y = f(x) = e^x, f(0) = e^0 = 1 \Rightarrow f'(x) = e^x, f'(0) = 1 \Rightarrow ... \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{(n+1)}(x) = e^x, f^{(n+1)}(\xi) = f(\Theta x) = e^{\Theta x} \Rightarrow$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\Theta x}, \quad 0 < \Theta < 1$$

$x = 1$ болса, $R_n(1) = \frac{1}{(n+1)!} e^{\Theta x} < \frac{3}{(n+1)!}$. $n = 1,2,3,...,7$ үшін: $\frac{3}{(n+1)!} > 10^{-5}$, ал $n = 8$ үшін: $\frac{3}{9!} < 10^{-5}$ болғандықтан, $n = 8$. Сонымен,

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{8!} = 2.71828.$$

Кейбір функциялардың Тейлор қатарына жіктелуін дәлелдеусіз көрсетеміз:

1. $y = e^x, \quad R = \infty \Rightarrow -\infty < x < \infty$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

2. $y = \sin x, \quad -\infty < x < \infty$

$$Sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

3. $y = \cos x, \quad -\infty < x < \infty$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...$$

4. $y = \ln(1+x), \quad -1 < x < 1$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

5. $y = (1+x)^m, \quad m - const, \quad -1 < x < 1$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + ... + \frac{m(m-1)...[m-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n} x^n + ...$$

Е с к е р т у . Көрсетілген жіктеулерді күрделі функциялар үшін де қолдануға болады. *Мысалы:*

1. $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - ... \quad , \qquad -1 < x < 1$

2. $cosx^2 = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + ..., \qquad -\infty < x < \infty$

3. $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left[1 + (-x^2)\right]^{-\frac{1}{2}}$. $(1+x)^m$ жіктелуіндегі $m = -\frac{1}{2}$ деп есептейміз және х-тің орнына $(-x^2)$-ты қоямыз. жинақтылық интервалы: $\left|-x^2\right| = \left|x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1\right|$ болады және:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + ...$$

Мысал 8. $I = \int_0^a e^{-x^2} dx$ интегралын есепте.

$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + ..., \ -\infty < x < \infty$, екенін ескеріп, екі жағын да интегралдасақ:

$$\int_0^a e^{-x^2} dx = \int_0^a [1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + ...]dx = (x - \frac{1}{1!} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{x^7}{7} + ...)\Big|_0^a =$$

$$= a - \frac{1}{1!} \cdot \frac{a^3}{3} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{a^5}{5} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{a^7}{7} + ...).$$